

**INTERPOLASI MENGGUNAKAN SPLIN TRIGONOMETRI DENGAN SATU
PARAMETER BENTUK**

Oleh

NOOR KHAIRIAH BINTI RAZALI

**Disertasi diserahkan untuk memenuhi
sebahagian keperluan bagi
Ijazah Sarjana Sains Matematik**

Jun 2010

PENGHARGAAN

Alhamdulillah, saya bersyukur kehadhrat Illahi kerana memberi saya kekuatan dan ketabahan dalam menjayakan disertasi ini.

Saya ingin mengucapkan jutaan terima kasih kepada Dr Jamaludin Bin Mohd Ali kerana sudi menyelia saya dengan penuh kesabaran untuk menyiapkan disertasi ini. Tanpa pertolongan, sokongan, nasihat dan semangat yang berterusan daripada beliau, disertasi ini tidak dapat disiapkan dengan baik.

Jutaan terima kasih juga kepada keluarga tercinta dan rakan-rakan seperjuangan yang tidak jemu memberi semangat dan sokongan sepanjang proses menyiapkan disertasi ini.

Semoga Allah S.W.T merahmati perjuangan ini.....amin.

Terima kasih.

ISI KANDUNGAN

| | Muka Surat |
|--|------------|
| PENGHARGAAN | ii |
| ISI KANDUNGAN | iii |
| SENARAI RAJAH | vi |
| ABSTRAK | viii |
| ABSTRACT | ix |
| | |
| BAB 1: PENGENALAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.1.1 Lengkung Polinomial Trigonometri Kuadratik Dengan Satu Parameter Bentuk | 2 |
| 1.1.2 Lengkung Polinomial Trigonometri Kubik Dengan Satu Parameter Bentuk | 2 |
| 1.2 Masalah Penyelidikan | 3 |
| 1.3 Objektif Penyelidikan | 3 |
| 1.4 Struktur Disertasi | 4 |
| | |
| BAB 2: SOROTAN SUSASTERA | 6 |

| | |
|---|---------------|
| BAB 4: APLIKASI LENGKUNG POLINOMIAL TRIGONOMETRI | 45 |
| 4.1 Huruf Arab | 45 |
| 4.2 Lengkung Bentuk Bebas | 47 |
| 4.2.1 Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik | 48 |
| 4.2.2 Lengkung polinomial Trigonometri kubik | 50 |
| 4.3 Interpolasi Lengkung | 53 |
| 4.3.1 Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik | 53 |
| 4.3.3 Lengkung polinomial Trigonometri kubik | 57 |
| BAB 5: KESIMPULAN DAN CADANGAN | 62 |
| 5.1 Kesimpulan Penyelidikan | 62 |
| 5.2 Cadangan | 65 |
| SENARAI RUJUKAN | 66 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Rajah 3.3.5 | Fungsi asas polinomial Trigonometri kubik seragam terbuka bagi $\lambda = 0.6$ | 40 |
| Rajah 3.3.6 | Lengkung polinomial Trigonometri kubik seragam terbuka | 40 |
| Rajah 3.3.7 | Lengkung polinomial Trigonometri kubik seragam terbuka dengan $\lambda < -0.5$ | 41 |
| Rajah 3.3.8 | Lengkung polinomial Trigonometri kubik seragam tertutup | 42 |
| Rajah 3.3.9 | Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik berbentuk elips | 44 |
| Rajah 4.1.1 | Sejarah perkembangan huruf Arab | 46 |
| Rajah 4.1.2 | Huruf-huruf Arab asas | 46 |
| Rajah 4.1.3 | Huruf Yā (ﻱ) dan Ain (ﺀ) | 47 |
| Rajah 4.2.1 | Lengkung kuadratik tertutup bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ global | 48 |
| Rajah 4.2.2 | Lengkung kuadratik tertutup bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ global | 50 |
| Rajah 4.2.3 | Lengkung kubik tertutup bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ global | 51 |
| Rajah 4.2.4 | Lengkung kubik tertutup bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ global | 52 |
| Rajah 4.3.1 | Lengkung kuadratik terbuka bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ global | 54 |
| Rajah 4.3.2 | Lengkung kuadratik terbuka bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ global | 55 |
| Rajah 4.3.3 | Lengkung kuadratik tertutup bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ berbeza | 56 |
| Rajah 4.3.4 | Lengkung kuadratik tertutup bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ berbeza | 57 |
| Rajah 4.3.5 | Lengkung kubik terbuka bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ global | 58 |
| Rajah 4.3.6 | Lengkung kubik terbuka bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ global | 59 |
| Rajah 4.3.7 | Lengkung kubik tertutup bagi huruf Yā (ﻱ) dengan λ berbeza | 60 |
| Rajah 4.3.8 | Lengkung kubik tertutup bagi huruf Ain (ﺀ) dengan λ berbeza | 61 |

ABSTRAK

Lengkung polinomial Trigonometri dengan satu parameter bentuk adalah satu kaedah alternatif yang digunakan untuk menjana lengkung dalam RGBK. Lengkung polinomial ini adalah sama seperti lengkung Splin-B, tetapi dengan parameter bentuk, bentuk lengkung polinomial Trigonometri boleh dimanipulasikan berdasarkan nilai parameternya pada poligon kawalan yang tetap. Lengkung ini dikaji berdasarkan vektor knot seragam dan darjah persamaan iaitu kuadratik dan kubik. Selain itu, peranan parameter bentuk, λ dikaji dan lengkung polinomial ini diaplikasikan dalam bentuk huruf Yā (ﻱ) dan Ain (ﺀ). Aplikasi lengkung polinomial ini dibuat berdasarkan lengkung bentuk bebas bagi lengkung terbuka dengan parameter bentuk global dan juga interpolasi lengkung yang menggunakan lengkung tertutup dengan parameter bentuk global dan berbeza. Bagi lengkung bentuk bebas, lengkung huruf yang terhasil adalah menghampiri poligon kawalan dan tidak menginterpolasikan set titik-titik yang digunakan, manakala bagi interpolasi lengkung, lengkung huruf yang terhasil adalah melalui dua titik pada lengkung kawalan iaitu titik pertama dan terakhir bagi setiap segmen lengkung dan menghasilkan bentuk huruf yang hampir sama dengan rajah asal. Lengkung huruf Yā (ﻱ) yang diplotkan menggunakan lengkung terbuka kuadratik dengan parameter bentuk berbeza menghasilkan lengkung yang hampir sama dengan rajah asal, manakala lengkung terbuka kubik dengan parameter berbeza pula telah menghasilkan lengkung huruf Ain (ﺀ) yang hampir sama dengan rajah asal.

BAB 1

Pengenalan

1.1 Latar Belakang

Rekabentuk Geometri Berasaskan Komputer (RGBK) telah digunakan secara meluas dan pelbagai kaedah telah diperkenalkan. Antara kaedah-kaedah yang digunakan dalam RGBK adalah lengkung Bezier, lengkung nisbah Bezier, lengkung Splin-B, lengkung NURBS (non-uniform rational B-Spline) dan banyak lagi. Lengkung ini boleh digunakan untuk menghasilkan pelbagai bentuk permukaan dengan menggunakan teknik tertentu. Kaedah RGBK juga banyak digunakan dalam industri untuk mencipta sesuatu bentuk. Lengkung-lengkung ini mempunyai ciri-ciri berbeza dan juga akan menghasilkan lengkung dan permukaan yang berbeza.

Dalam disertasi ini, satu kaedah alternatif digunakan iaitu kaedah interpolasi menggunakan polinomial Splin-B Trigonometri. Splin-B Trigonometri ini telah diperkenalkan oleh Schoenberg pada tahun 1964, dan hubungan rekursinya untuk susunan rambang telah distabilkan oleh Lyche dan Winther pada tahun 1979. Seterusnya, Walz (1997a) telah menunjukkan Splin-B Trigonometri yang mempunyai bahagian susunan ganjil bagi vektor knot seragam adalah tetap dan memenuhi ciri-ciri hull cembung. Banyak kajian mengenai Splin-B Trigonometri telah dilakukan dan juga

mempunyai keselanjaran C^3 bagi parameter bentuk $\lambda \neq 1$ dan mempunyai keselanjaran C^5 bagi parameter bentuk $\lambda = 1$. Dengan parameter bentuk, lengkung polinomial Trigonometri kubik akan menghampiri dengan lengkung Splin-B kubik atau lebih menghampiri poligon kawalan. Lengkung polinomial Trigonometri kubik juga boleh menjadi lengkung polinomial Trigonometri kuadratik apabila parameter bentuk, $\lambda = 0$ dan juga digambarkan dalam bentuk elips (Han, 2004).

1.2 Masalah Penyelidikan

Menjana bentuk lengkung menggunakan kaedah Rekabentuk Geometri Berasaskan Komputer (RGBK) telah menghasilkan beberapa persamaan seperti lengkung Bezier, lengkung nisbah Bezier, lengkung Splin-B dan lain-lain. Sehubungan dengan ini, satu kaedah yang dapat memanipulasi bentuk lengkung diperlukan untuk menghasilkan sesuatu bentuk yang dikehendaki dengan sempurna dan cepat. Perubahan bentuk sesuatu lengkung adalah bergantung pada perubahan poligon kawalannya. Berdasarkan masalah ini, polinomial Trigonometri dengan satu parameter bentuk digunakan untuk menjana bentuk lengkung, di mana dengan poligon kawalan tetap, bentuk lengkung boleh diubah hanya dengan memanipulasikan nilai parameter bentuk.

1.3 Objektif Penyelidikan

Objektif-objektif bagi disertasi ini adalah:

- Mengkaji peranan parameter bentuk, λ dalam lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik seragam.

- Mengkaji fungsi asas seragam bagi polinomial Trigonometri kuadratik dan polinomial Trigonometri kubik dengan satu parameter bentuk.
- Mengkaji lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik seragam dengan satu parameter bentuk.
- Mengaplikasikan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik seragam dengan satu parameter bentuk dalam huruf Arab. Aplikasi ini dibuat berdasarkan lengkung tertutup bagi bentuk bebas dan interpolasi dengan lengkung terbuka.

1.4 Struktur Disertasi

Disertasi ini dibahagikan kepada empat bab. Bab 2 membincangkan berkaitan sorotan susastera. Dalam bab ini, sejarah dan perkembangan polinomial Trigonometri dibincangkan secara ringkas.

Seterusnya, Bab 3 membincangkan secara terperinci berkaitan lengkung polinomial Trigonometri dengan satu parameter bentuk. Bab ini dibahagikan kepada tiga subbahagian iaitu parameter bentuk, lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik. Dalam bab ini, peranan parameter bentuk yang dapat memanipulasikan bentuk lengkung dibincangkan. Seterusnya lengkung polinomial dibincangkan secara terperinci, di mana fungsi asas, persamaan lengkung dan keselanjaraannya dikaji. Selain itu, graf juga diplotkan bagi menunjukkan hasil daripada persamaan yang dikaji.

BAB 2

SOROTAN SUSASTERA

Splin-B Trigonometri telah dikaji dan diperkenalkan oleh Schoenberg (1964). Schoenberg telah memperkenalkan fungsi cebis demi cebis dalam ruang

$$T_m = \text{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(kx), \sin(kx)\} \quad (2.1)$$

pada dimensi $m = 2k + 1$ dan juga telah membuktikan sokongan secara setempat untuk Splin-B Trigonometri yang ada (Walz, 1997a).

Kajian ini diteruskan oleh Lyche dan Wither (1979), mereka telah mengkaji berkaitan hubungan rekursi fungsi ini dan juga telah memperkenalkan idea “perantaraan” ruang

$$T_m = \text{span}\{1, \cos(\frac{x}{2}), \sin(\frac{x}{2}), \dots, \cos(\frac{kx}{2}), \sin(\frac{kx}{2})\} \quad (2.2)$$

pada dimensi $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, di mana hubungan rekursi untuk susunan arbitari yang bergantung pada m sama ada genap atau ganjil dan ini telah menghasilkan Splin-B

Trigonometri yang stabil. Splin-B Trigonometri adalah kombinasi fungsi linear yang mempunyai sokongan secara setempat (Walz, 1997a).

Splin-B Trigonometri adalah ditakrifkan seperti berikut:

Bagi $s(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $c(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Diberi k ialah integer positif, bagi

$$\mathcal{T}_k = \begin{cases} \text{span}\{1, s(2x), c(2x), s(4x), c(4x), \dots, s((k-1)x), c((k-1)x)\}, & k \text{ ganjil} \\ \text{span}\{s(x), c(x), s(3x), c(3x), \dots, s((k-1)x), c((k-1)x)\}, & k \text{ genap} \end{cases} \quad (2.3)$$

adalah ruang polinomial Trigonometri dalam turutan k dan $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_k$ jika $k-1 \geq 0$

adalah genap, tetapi sebaliknya jika adalah ganjil. Mengandaikan

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = b\}$$

adalah bahagian selang $[a, b]$ di dalam subselang $m+1$. Bagi urutan knot

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+k},$$

di mana

$$a = t_1 = \dots = t_k, \quad t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b,$$

dan $\{t_{k+1} \leq \dots \leq t_n\}$ adalah terhasil daripada pengulangan setiap x_i sebanyak k_i kali,

$i = 1, \dots, m$. Di dalam kertas kerja ini, knot-knot diandaikan adalah sebagai

$$0 < t_{i+k-1} - t_i < 2\pi, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dengan bahagian yang dikembangkan, bagi

$$T_i^1(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \quad (2.4)$$

dan untuk $k > 1$, bagi

$$T_i^k(x) = \frac{s(x-t_i)}{s(t_{i+k-1}-t_i)} T_i^{k-1}(x) + \frac{s(t_{i+k}-x)}{s(t_{i+k}-t_{i+1})} T_{i+1}^{k-1}(x). \quad (2.5)$$

T_i^k dikenali sebagai Splin-B Trigonometri (Lyche et al., 1998).

Pada tahun 1995, lengkung kawalan untuk Splin-B Trigonometri telah diperkenalkan dan mempunyai ciri-ciri yang sama seperti polinomial splin yang klasik. Dalam kertas kerja ini, penulis telah membincangkan berkaitan algoritma-algoritma penyelitan knot dan telah membuktikan apabila semakin banyak penyelitan knot-knot dimasukkan ke dalam Splin-B Trigonometri, lengkung-lengkung kawalan akan menumpu kepada splin. Selain itu, ciri-ciri hull cembung dan variasi-penyusutan distabilkan (Koch et al., 1995).

Ciri-ciri Splin-B Trigonometri juga telah dikaji, di mana pengamiran kompleks untuk fungsi ini distabilkan dan sesetengahnya sama seperti kes polinomial, tetapi telah dibuktikan dengan cara yang berbeza dan juga dengan penyelesaian yang agak sukar. Dengan fungsi pengamiran, sebahagian ciri-ciri merujuk pada penaksiran Splin-B Trigonometri boleh dibuktikan dengan terbitan dan terbitan separa terhadap knot-knot. Kertas kerja ini juga telah membuktikan Splin-B Trigonometri dengan turutan yang ganjil bagi knot-knot seragam membentuk bahagian yang tetap, dan dengan merujuk kepada lengkung Splin-B, ini menepati ciri-ciri hull cembung (Walz, 1997a).

Kajian berkaitan pengekaln bentuk yang terhasil daripada lengkung polinomial Trigonometri telah dikaji oleh Pena (1997) dan membuktikan ruang Trigonometri polinomial, $\mathcal{T}_m = \text{span}\{1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(mt), \sin(mt)\}$ adalah tidak sesuai digunakan untuk kaedah Rekabentuk Geometri Berasaskan Komputer (RGBK) yang menggunakan titik-titik kawalan. Untuk mengekalkan bentuk yang baik bagi sesuatu lengkung, asas-asas persamaan mestilah dinormalkan secara positif keseluruhan. Pena juga telah membuktikan polinomial Trigonometri tidak dinormalkan secara positif keseluruhan. Ini dibuktikan dalam sistem $B = (b_0, b_1, \dots, b_{2m})$ dengan

$$b_j(t) = \cos^{2m-j}\left(\frac{t}{2}\right) \sin^j\left(\frac{t}{2}\right), \quad j = 0, 1, \dots, 2m, \quad t \in [0, \pi] \quad (2.6)$$

adalah asas untuk \mathcal{T}_m . Identiti $(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right))^m = 1$ telah digunakan dalam (Pena, 1997) dan telah diaplikasikan dengan teorem binomial,

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \cos^{2(m-i)}\left(\frac{t}{2}\right) \sin^{2i}\left(\frac{t}{2}\right) = 1. \quad (2.7)$$

Dengan menganggap $U = (u_0, \dots, u_{2m})$ adalah dinormalkan oleh \mathcal{T}_m B-asas. Oleh sebab itu, fungsi-fungsi u_i memenuhi $u_i = d_i b_i$ untuk sebahagian $d_i > 0$ bagi semua $i = 0, \dots, 2m$. Apabila U dinormalkan, $1 = \sum_{i=0}^{2m} u_i = \sum_{i=0}^{2m} d_i b_i$, dan telah memberi jawapan yang bertentangan dengan identiti di atas, di mana $d_j = 0$ apabila j ganjil. Pena juga telah menunjukkan ruang bagi $\mathcal{C}_m = \text{span}\{1, \cos(t), \dots, \cos(mt)\}$ adalah sesuai untuk membuat rekaan menggunakan titik-titik kawalan kerana asas persamaan telah

$$s_v(\tau, a) = \frac{\varphi_v(\tau, a) \varphi_{n-v}(1-\tau, a)}{\varphi_v(\tau_a, a) \varphi_{n-v}(\tau_a, a)}, \quad (2.9)$$

di mana $\tau_a = 1 - a(n + 1)$, dan dinotiskan sebagai v th polinomial Stancu.

Manakala, polinomial Stancu melalui segi tiga dapat ditakrifkan seperti berikut, dengan menunjukkan satu titik P bagi segi tiga tetap $\langle T_1, T_2, T_3 \rangle$ dengan koordinat-koordinat baripusat (τ_1, τ_2, τ_3) , di mana $P = T_1\tau_1 + T_2\tau_2 + T_3\tau_3$ dan $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$. Set indeks yang akan digunakan adalah $N_n = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{N}_0^3: v_1 + v_2 + v_3 = n\}$ dengan unsur-unsur $\binom{n+2}{2}$. Dengan fungsi φ_k dan titik τ_a seperti di atas, dan setiap $(v_1, v_2, v_3) \in N_n$, polinomial Stancu melalui segi tiga adalah

$$s_{\{v_1, v_2, v_3\}}(P, a) = \frac{\varphi_{v_1}(\tau_1, a) \cdot \varphi_{v_2}(\tau_2, a) \cdot \varphi_{v_3}(\tau_3, a)}{\varphi_{v_1}(\tau_a, a) \cdot \varphi_{v_2}(\tau_a, a) \cdot \varphi_{v_3}(\tau_a, a)}. \quad (2.10)$$

Satu kajian berkenaan teori umum Quasi-interpolasi berdasarkan Splin-B Trigonometri telah dilakukan. Persamaan ini dikembangkan berdasarkan kes polinomial splin. Quasi-interpolasi ini dibuat kerana persamaanya adalah setempat, mudah dikira, dan juga dapat digunakan dalam pelbagai fungsi secara meluas. Persamaan Trigonometri Quasi-interpolasi adalah :

Diberi satu integer $k \geq 1$, dengan menggunakan T_i^k set Splin-B Trigonometri dalam persamaan (2.4) dan (2.5), diberi set fungsi linear $\lambda_1 \dots \lambda_n$ yang m.a.a ditakrifkan di dalam ruang fungsi \mathcal{F} dalam selang $[a, b]$ dengan $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$. Dengan itu, bagi setiap $f \in \mathcal{F}$,

$$Qf = \sum (\lambda_i f) T_i^k, \quad (2.11)$$

$$b_i(u) = \begin{cases} \beta_i d(t_i), & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 1 - \alpha_{i+1} c(t_{i+1}) - \beta_{i+1} d(t_{i+1}), & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \alpha_{i+2} c(t_{i+2}), & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0, & u \notin [u_i, u_{i+3}) \end{cases} \quad (2.12)$$

untuk $i = 0, 1, \dots, n$. Manakala fungsi persamaan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik adalah,

$$T(u) = \sum_{j=0}^n b_j(u) P_j, \quad n \geq 2, u \in [u_2, u_{n+1}], \quad (2.13)$$

di mana P_j adalah titik-titik yang di beri. Lengkung ini adalah sama seperti lengkung Splin-B. Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik ini mempunyai keselanjaran C^2 , manakala lengkung Splin-B kuadratik mempunyai keselanjaran C^1 . Lengkung polinomial kuadratik Trigonometri adalah lebih hampir dengan titik-titik kawalan berbanding dengan lengkung Splin-B (Han, 2003).

Kajian Han berkaitan dengan parameter bentuk diteruskan lagi dengan mewujudkan parameter-parameter bentuk setempat dan menyediakan satu tambahan dalam memanipulasikan sesuatu lengkung. Fungsi asas polinomial Trigonometri adalah:

Diberi knot-knot $u_0 < u_1 < \dots < u_{n+3}$, parameter-parameter setempat $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, dengan $h_i = u_{i+1} - u_i$, $\alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}$, $\beta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$, $t_i(u) = \frac{\pi}{2} \frac{u - u_i}{h_i}$, dan

$$c_i(t) = \alpha_i (1 - \sin(t)) (1 - \lambda_{i-1} \sin(t)) - \delta_{i-1} \cos^2(t),$$

$$d_i(t) = \beta_i (1 - \cos(t)) (1 - \lambda_i \cos(t)) + \delta_i \sin^2(t),$$

Kemudian digabungkan dengan fungsi asas Trigonometri kuadratik yang telah dinormalkan adalah ditakrifkan seperti berikut:

$$b_i(u) = \begin{cases} d(t_i), & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 1 - c(t_{i+1}) - d(t_{i+1}), & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ c(t_{i+2}), & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0, & u \notin [u_i, u_{i+3}) \end{cases} \quad (2.14)$$

untuk $i = 0, 1, \dots, n$. Manakala fungsi persamaan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik adalah,

$$T(u) = \sum_{j=0}^n b_j(u)P_j, \quad n \geq 2, u \in [u_2, u_{n+1}]. \quad (2.15)$$

Dalam kertas kerja ini, dengan vektor knot yang tidak seragam dan dua parameter setempat, polinomial kuadratik Trigonometri cebis demi cebis telah dipaparkan. Lengkung ini mempunyai kaedah dan keselajaran yang sama dengan lengkung kuadratik Splin-B tidak seragam. Kedua-dua parameter bentuk setempat ini masing-masing bertindak sebagai kawalan tegangan setempat dan kawalan berat sebelah setempat. Perubahan pada parameter setempat ini hanya akan mengubah dua tembereng lengkung. Lengkung yang terhasil menghampiri lengkung kuadratik NURBS (non-uniform rational B-Spline) dan lengkung nisbah Bezier kuadratik di mana hubungan antara parameter bentuk setempat dan pemberat untuk lengkung nisbah dapat diuraikan. Lengkung polinomial Trigonometri adalah sangat hampir dengan lengkung nisbah Bezier kuadratik (Han, 2006).

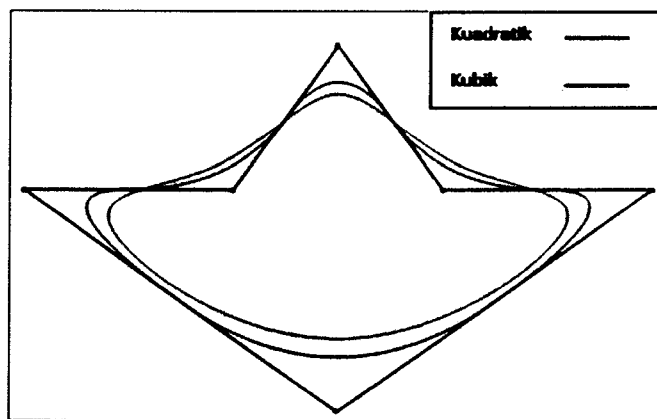
$$N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (3.1.2)$$

di mana p adalah derajat fungsi ini (Shene, 2008).

3.1.1.2 Lengkung Splin-B

Takrif 3.1.2: Bagi titik-titik kawalan $n + 1$ di mana P_0, P_1, \dots, P_n dan vektor knot $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, lengkung Splin-B bagi derajat p dapat ditakrifkan seperti berikut (Shene, 2008):

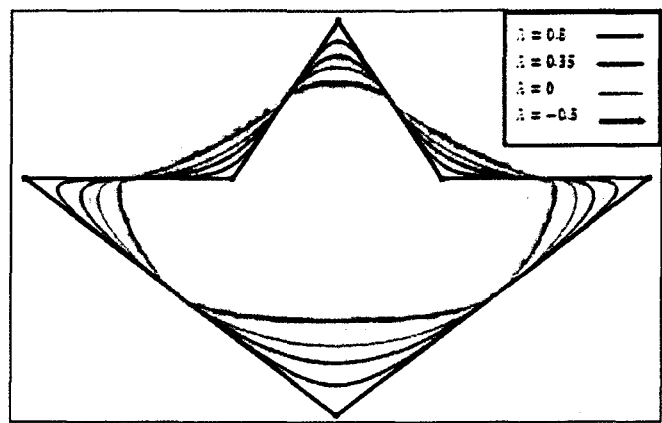
$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i. \quad (3.1.3)$$



Rajah 3.1.1: Lengkung Splin-B kuadratik dan kubik seragam.

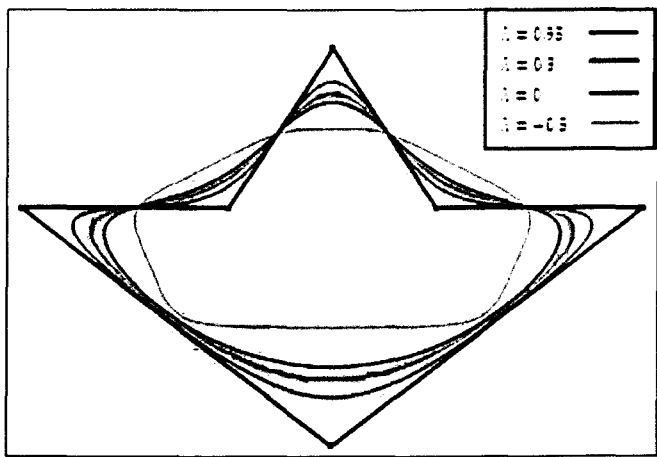
Rajah 3.1.1 menunjukkan lengkung Splin-B kuadratik (garisan biru) dan kubik (garisan merah). Kedua-dua lengkung ini diplot berdasarkan persamaan (3.1.2) dan (3.1.3).

3.1.2 Splin-B Trigonometri Dengan Satu Parameter Bentuk



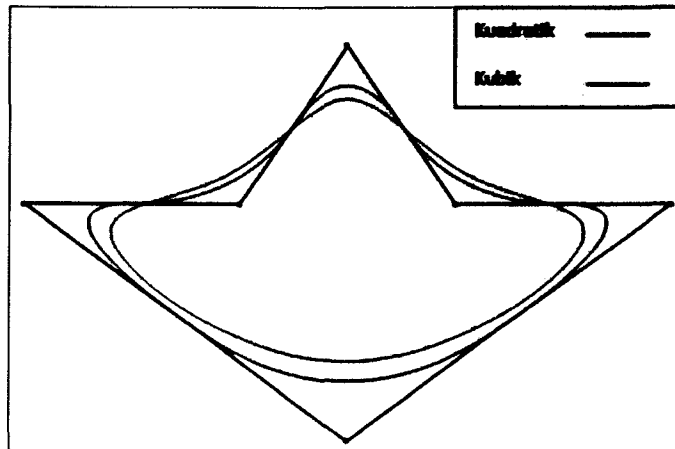
Rajah 3.1.2: Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik seragam.

Lengkung polinomial Trigonometri kuadartik dengan parameter bentuk berbeza ditunjukkan dalam rajah 3.1.2. Lengkung-lengkung ini diplot berdasarkan $\lambda = 0.8, 0.35, 0, -0.5$ masing-masing garisan biru, merah, oren dan hijau.



Rajah 3.1.3: Lengkung polinomial Trigonometri kubik seragam.

Rajah 3.1.3 menunjukkan lengkung polinomial Trigonometri kubik dengan parameter bentuk, $\lambda = 0.95, 0.3, 0, -0.5$ masing-masing garisan merah, hijau, biru dan oren.



Rajah 3.1.4: Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik (garisan biru) dan kubik (garisan merah) seragam dengan $\lambda = 0.15$.

Rajah 3.1.1 menunjukkan sesuatu persamaan tanpa parameter bentuk akan menghasilkan lengkung yang tetap berdasarkan poligon kawalan seperti lengkung Splin-B. Manakala bagi persamaan yang mempunyai parameter bentuk, bentuk sesuatu lengkung boleh diubah berdasarkan skala parameternya. Berdasarkan rajah 3.1.2 dan 3.1.3, lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik menghampiri poligon kawalan apabila nilai λ meningkat dan sebaliknya apabila nilai λ berkurang. Rajah 3.1.4 pula menunjukkan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dan kubik, di mana lengkung yang terhasil hampir sama dengan lengkung Splin-B dalam rajah 3.1.1, tetapi

boleh berubah mengikut nilai λ . Dengan parameter bentuk, lengkung yang dikehendaki dapat dihasilkan dengan mudah dan cepat.

3.2 Lengkung Polinomial Trigonometri Kuadratik Dengan Satu Parameter Bentuk

3.2.1 Fungsi asas polinomial Trigonometri

Takrif 3.2.1: Diberi knot-knot $u_0 < u_1 < \dots < u_{n+3}$, dengan $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$,

$$\alpha_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i}, \quad \beta_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_i + \Delta u_{i+1}}, \quad t_i(u) = \frac{\pi}{2} \frac{u - u_i}{\Delta u_i}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1, \text{ dan}$$

$$c(t) = (1 - \sin(t))(1 - \lambda \sin(t)), \quad d(t) = (1 - \cos(t))(1 - \lambda \cos(t)).$$

Kemudian digabungkan dengan fungsi asas Trigonometri yang telah dinormalkan dan ditakrifkan seperti berikut:

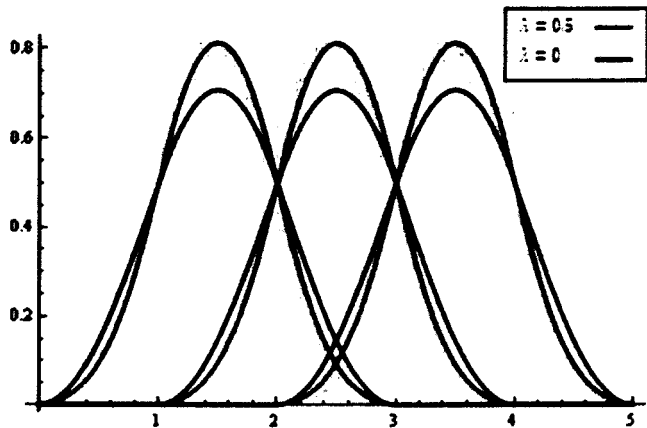
$$b_i(u) = \begin{cases} \beta_i d(t_i), & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 1 - \alpha_{i+1} c(t_{i+1}) - \beta_{i+1} d(t_{i+1}), & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \alpha_{i+2} c(t_{i+2}), & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0, & u \notin [u_i, u_{i+3}) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

untuk $i = 0, 1, \dots, n$.

Teorem 3.2.1: Fungsi asas ini mempunyai ciri-ciri seperti berikut:

- a) $b_i(u) > 0$, untuk $u_i < u < u_{i+3}$,
- b) $b_i(u) = 0$, untuk $u_0 \leq u \leq u_i$, $u_{i+3} \leq u \leq u_{n+3}$,
- c) $\sum_{i=0}^n b_i(u) = 1$, $u \in [u_2, u_{n+1}]$.

Teorem 3.2.1 menunjukkan fungsi asas ini membentuk satu bahagian uniti dan fungsi $b_i(u)$ mempunyai sokongan dalam selang $[u_i, u_{i+3}]$ (Han, 2002).



Rajah 3.2.1: Fungsi asas polinomial Trigonometri kuadratik seragam.

Keseragaman sesuatu fungsi ditentukan oleh knot-knotnya. Untuk knot-knot yang seragam, $b_i(u)$ akan menjadi fungsi asas yang seragam dan begitu juga sebaliknya. Rajah 3.2.1 menunjukkan graf fungsi asas seragam bagi vektor knot $U = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ dan $\lambda = 0.5$ dan $\lambda = 0$ masing-masing garisan merah dan hitam.

3.2.1.1 Transformasi parametrik dalam selang $u \in [2, 3]$

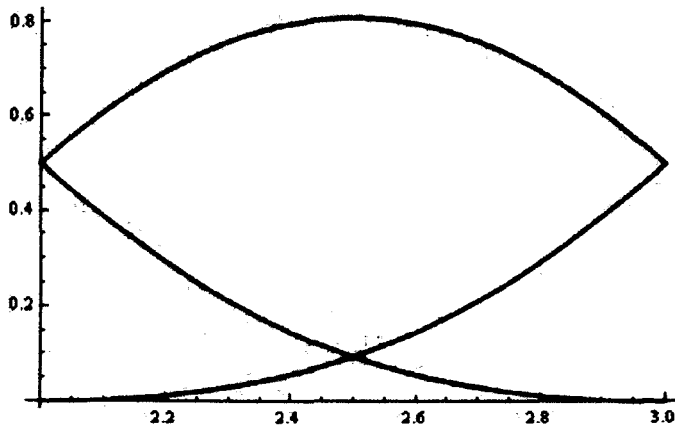
Berdasarkan rajah 3.2.1, parametrik u bagi fungsi asas ditransformasikan dalam selang $[2,3]$. Persamaan-persamaan dalam selang ini adalah

$$b_0(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) \left(1 - \lambda \sin \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) \tag{3.2.2}$$

$$b_1(u) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) \left(1 - \lambda \cos \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) \left(1 - \lambda \sin \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right] \right) \quad (3.2.3)$$

$$b_2(u) = \frac{1}{2} (1 - \cos \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right]) (1 - \lambda \cos \left[\frac{1}{2} \pi (u - 2) \right]) \quad (3.2.4)$$

dan menghasilkan graf seperti rajah 3.2.2.



Rajah 3.2.2: Fungsi asas polinomial Trigonometri kuadratik seragam dalam selang

$u \in [2,3]$ bagi $\lambda = 0.5$.

3.2.2 Keselajaran fungsi asas

Teorem 3.2.2: Fungsi asas Trigonometri, $b_i(u)$ mempunyai keseluruhan C^1 pada setiap knot-knot (Han, 2002).

Bagi knot-knot seragam $u = (0,1,2,3,4,5)$, keseluruhan dibuktikan berdasarkan knot-knot $u_1 = 1$ dan $u_2 = 2$. Bagi keseluruhan C^1 , terbitan pertama dicari di mana persamaan ini dapat ditulis secara umum seperti berikut:

$$b_i^{(k)}(u_{i+1}^-) = b_i^{(k)}(u_{i+1}^+), \quad b_i^{(k)}(u_{i+2}^-) = b_i^{(k)}(u_{i+2}^+), \quad k = 0, 1. \quad (3.2.5)$$

Keselanjaran ini terbukti, apabila persamaan-persamaan ini dimasukkan dengan nilai $u_1 = 1$ dan $u_2 = 2$, persamaan-persamaan yang terhasil adalah seperti berikut:

$$b_0^{(0)}(u_1^-) = b_0^{(0)}(u_1^+) = \frac{1}{2}, \quad b_0^{(0)}(u_2^-) = b_0^{(0)}(u_2^+) = \frac{1}{2}, \quad (3.2.6)$$

$$b_0^{(1)}(u_1^-) = b_0^{(1)}(u_1^+) = \frac{1}{4}(\pi + \lambda\pi), \quad b_0^{(1)}(u_2^-) = b_0^{(1)}(u_2^+) = -\frac{1}{4}(\pi + \lambda\pi), \quad (3.2.7)$$

dan menepati kesinjaran C^1 . Fungsi asas ini akan terturun kepada fungsi asas polinomial Trigonometri linear apabila $\lambda = 0$.

3.2.3 Lengkung polinomial Trigonometri

Takrif 3.2.2: Diberi titik-titik P_i ($i = 0, 1, \dots, n$) dalam \mathbb{R}^2 or \mathbb{R}^3 dan vektor knot $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+3})$. Seterusnya

$$T(u) = \sum_{j=0}^n b_j(u)P_j, \quad n \geq 2, u \in [u_2, u_{n+1}], \quad (3.2.8)$$

adalah lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dengan parameter bentuk.

Jika $u_i \neq u_{i+1}$ di mana $2 \leq i \leq n$, seterusnya untuk $u \in [u_i, u_{i+1}]$, maka persamaa segmen lengkung $T(u)$ dapat dituliskan seperti berikut:

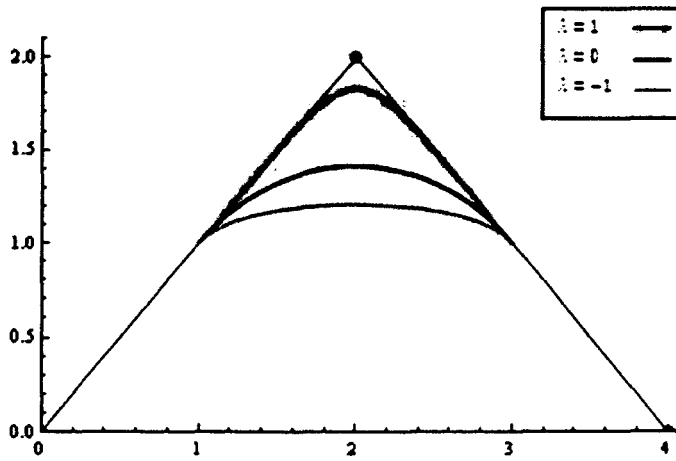
$$T(u) = b_{i-2}(u)P_{i-2} + b_{i-1}(u)P_{i-1} + b_i(u)P_i, \quad (3.2.9)$$

di mana,

$$b_{l-2}(u) = \alpha_l c(t_l),$$

$$b_{l-1}(u) = 1 - \alpha_l c(t_l) - \beta_l d(t_l),$$

$$b_l(u) = \beta_l d(t_l).$$



Rajah 3.2.3: Lengkung segmen polinomial Trigonometri kuadratik.

Rajah 3.2.3 menunjukkan lengkung segmen bagi vektor knot $U = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ dan $\lambda = 1, 0, -1$, masing-masing adalah garisan hijau, biru dan oren.

3.2.4 Keselajaran lengkung polinomial Trigonometri

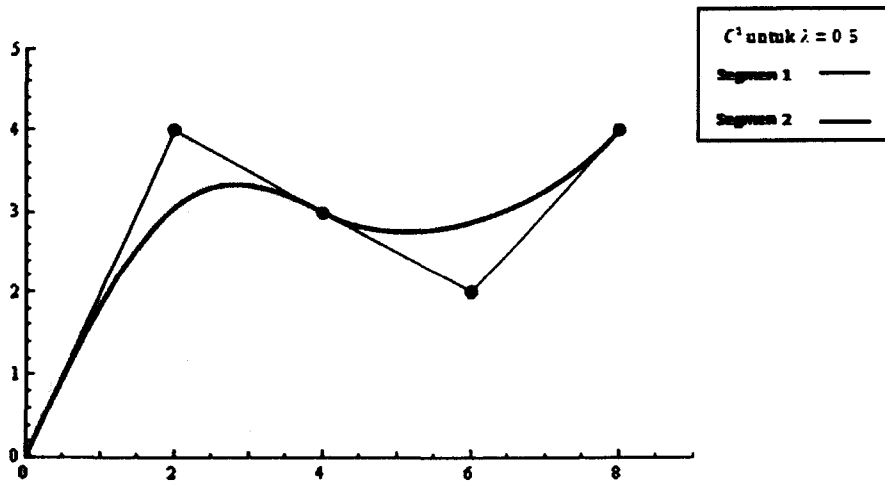
Keselajaran lengkung polinomial Trigonometri pada setiap knot ditentukan oleh knot-knot yang dipilih dan ditunjukkan seperti dalam teorem berikut.

Teorem 3.2.3: Jika knot u_i berulang sebanyak k kali di mana $k = 1, 2, 3$, maka lengkung polinomial Trigonometri mempunyai keselajaran C^{2-k} (Han, 2002).

Keselanjaraan lengkung bagi knot yang berulang $k = 1$ dikaji dalam disertasi ini, oleh sebab itu, keselanjaraan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik adalah C^1 . Secara umumnya, keselanjaraan lengkung dibuktikan menggunakan persamaan-persamaan berikut,

Bagi $u_i \neq u_{i+1}$,

$$\begin{aligned} T(u_i^+) &= \alpha_i P_{i-2} + (1 - \alpha_i) P_{i-1}, & T(u_{i+1}^-) &= (1 - \beta_i) P_{i-1} + \beta_i P_i, \\ T'(u_i^+) &= \frac{(\lambda+1)\pi}{2\Delta u_i} \alpha_i (P_{i-1} - P_{i-2}), & T'(u_{i+1}^-) &= \frac{(\lambda+1)\pi}{2\Delta u_i} \beta_i (P_i - P_{i-1}). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$



Rajah 3.2.4: Lengkung polinomial Trigonometri kuadratik dengan keselanjaraan C^1 .

Rajah 3.2.4 menunjukkan lengkung polinomial Trigonometri kuadratik yang memenuhi keselanjaraan C^1 dengan $\lambda = 0.5$ yang diwakili oleh dua segmen lengkung garisan merah dan biru. Berdasarkan vektor knot $U = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$, persamaan-persamaan yang terhasil adalah seperti berikut,